福建省《高等代数》与《线性代数》课程建设第十一次研讨会

与给定矩阵A可交换的子空间C(A)的一些讨论

杨忠鹏[1] 林志兴[1] 陈智雄[1] 张清新[1，2]

1.莆田学院数学系

2.漳州师范学院数学与信息科学系

莆田學院
Putian University

目　录

一、引言

设$P^{m\times n}$为数域P上$m\times n$矩阵的集合，矩阵$A\in P^{n\times n}$的行列式与秩分别用$\det A$和$\mathrm{r}(A)$表示。约定$f_A(x)=\det(xE-A)$与$m_A(x)$分别为A的特征多项式与最小多项式。这里E为单位矩阵，$P[x]$为数域P上一元多项式集合，$\deg f(x)$为$f(x)\in P[x]$的次数。

用$V(P)$表示数域P上的线性空间，$\dim V(P)$表示$V(P)$维数。由于乘法一般是不满足可交换的，因此与给定矩阵A可交换的矩阵的性质的讨论，是线性代数、高等代数教学及研究的一个重要问题。$P^{n\times n}$作为一个重要的线性空间，与给定矩阵$A\in P^{n\times n}$可交换的矩阵的集合

$$C(A)=\{B\mid AB=BA,\ B\in P^{n\times n}\} \qquad (1.1)$$

（1.1）本身就是一个常见的全矩阵空间$P^{n\times n}$的子空间（也是全矩阵环$P^{n\times n}$的子环，也称为A的中心化子。见[1][2]），从线性空间的基本理论和方法的教学及研究角度，相对矩阵运算有独立的意义。本文从全矩阵空间（环）的子空间$C(A)$的代数性质的教学研究开始，结合我们的教学及研究、本科生毕业论文的指导实施，谈谈我们的看法，供同行们批评指正。

二、通用材料的教材、辅导相关习题

通用的教材、辅导对$C(A)$的讨论是较重视，这可从所配备的习题的数量与质量可看出.

问题 2.1（见[3，习题 6.13 和 6.14][4, P22, 题 6]）设$A \in P^{n\times n}$：

1） 证明：全体与A可交换的矩阵组成$P^{n\times n}$的一子空间，记作$C(A)$；

2） 当$A = E_n$时，求$C(A)$；

3） 当$A = diag(1,2,\cdots,n)$时，求$C(A)$的维数和一组基；

4） 设$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$，求$C(A)$的维数和一组基；

5） 设$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 求$C(A)$的维数和一组基。

问题 2.2（见[5， §4.3、5.2]）如果 $AB=BA$, 矩阵 B 就称与 A 可交换,

设 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$, 求所有与 A 可交换的矩阵.

问题 2.3（见[5， §6.2 例 3]）设 P 为数域， $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$,

求 $P^{3\times 3}$ 中所有与 A 可交换的矩阵所构成的线性空间 V 的维数和一组基.

问题 2.4（见[5，习题§6.3.4]）设P为数域， $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$，求$P^{3\times 3}$的子空间$C(A)$的维数和一组基.

问题 2.5（见[5，§6.2 例 2]）设矩阵$A=diag(1,\omega,\omega^2)$，$\omega=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)$；令$W(A)=\{f(A)\mid f(x)\in R[x]\}$， R是实数域，证明：

1） $W(A)$关于矩阵的加法和数与矩阵的乘法构成R上的线性空间

2） $\dim W(A)=3$

问题 2.6（见 [8, P48, 题 5]）设 $A \in P^{n\times n}$ 的最小多项式 $m_A(x)$ 次数 $\deg m_A(x) = k$. 则 $W(A) = \{f(A) \mid f(x) \in P[x]\}$ 是由 $E_n, A, A^2, \cdots, A^{k-1}$ 为基构成的全矩阵空间 $P^{n\times n}$ 的 k 维子空间。

问题 2.6 曾作为中南大学 2003 年硕士研究生入学高等代数试题。

由于矩阵的可交性与所在的数域扩大是无关的，因此可把讨论放置于 $A \in C^{n\times n}$ 的环境，这样 $Jordan$ 标准形就成了一个重要的有力工具。

二、关于C(A)的维数与C(A)的交换性

命题 3.1（见[9, 定理 3]或[10][11]）设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t$是$A\in C^{n\times n}$的所有不同特征值且其$Jordan$标准形满足

$$P^{-1}AP=J=diag(J_1,J_2,\cdots,J_t),\ J_i=diag(J_{i,1},J_{i,2},\cdots,J_{i,s_i})\quad i=1,2,\cdots,t\quad(3.1)$$

(3.1)中$J_i\in C^{n_i\times n_i}$, $\sum_{i=1}^{t}n_i=n$且(3.1)中$Jordan$块或为1阶子矩阵或为

$$J_{i,l}=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i\end{bmatrix}\in C^{n_{i,l}\times n_{i,l}},\ l=1,2,\cdots s_i;\ n_{i,1}\ge n_{i,2}\ge\cdots\ge n_{i,s_i}\quad(3.2)$$

(3.2)中$\sum_{l=1}^{s_i} n_{i,l} = n_i$, $i = 1,2,\cdots,t$.

则$\dim C(A) = \sum_{i=1}^{t}\sum_{l=1}^{s_i}(2l-1)n_{i,l}$.

$$\dim C(A) = n + \sum_{i=1}^{t}\sum_{l=1}^{s_i} 2(l-1)n_{i,l} \quad A \in C^{n\times n}. \tag{3.3}$$

$$n \le \dim C(A) \le n^2,\ A \in C^{n\times n} \tag{3.4}$$

由问题 2.1 的 2）和 5）的答案为$\dim C(E_n) = \dim P^{n\times n} = n^2$，而$\dim C(A) = 3$，因此可知问题 2.1 的 2）和 5）给出说明了中心化子$C(A)$的维数(3.4)的上界和下界可达的例子。

问题 2. 2 和 2. 3 中的给定矩阵A只相差了一个（2, 3）处的元素，但由[5][6][7]给出的答案可知问题 2. 2 的$C(A)$是以

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\3&1&2\end{bmatrix}$$

$$E_3, A_1=\begin{pmatrix}-1&0&0\\3&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&2\\3&1&1\end{pmatrix}$$

为基构成的子空间，即$\dim C(A)=3$

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&1&2\end{bmatrix}$$

而问题 2. 3 中的$C(A)$的基为

$$A_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\-3&0&0\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&-3&0\end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}, A_4=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&-1&0\end{pmatrix}, A_5=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\3&1&1\end{pmatrix}$$

即$\dim C(A)=5$。

虽然$C(A)$中每个元素与A可交换，$C(A)$未必是全矩阵环的交换子环，这可从问题 2. 3 中的$C(A)$中基向量

$$A_1A_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\-3&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&-3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&-3&0\end{pmatrix}=A_2$$

$$A_2A_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&-3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\-3&0&0\end{pmatrix}=0$$

知$A_1A_2\neq A_2A_1$。这说明问题 2. 3 中$C(A)$不是$P^{n\times n}$的交换子环。

因为问题2.2中$C(A)=L(E,A_1,A_2)$，从

$$A_1A_2=\begin{pmatrix}-1&0&0\\3&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&2\\3&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&2\\3&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\3&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=A_2A_1$$

可知当$B=b_0E+b_1A_1+b_2A_2$，$C=c_0E+c_1A_1+c_2A_2\in C(A)$时，有$BC=CB$，即此时$C(A)$为全矩阵环$P^{n\times n}$的交换子环。

我们曾经给出过一般性结论的矩阵证法。

命题 3.2（见[2，定理 1]）设$A\in P^{n\times n}$，则

$C(A)$为全矩阵环$P^{n\times n}$的交换子环$\Leftrightarrow f_A(x)=m_A(x)$。

这样由问题 2.6 和命题 3.2 很容易得到

命题 3.3 设$A\in P^{n\times n}$，则

$C(A)$是交换子环$\Leftrightarrow \deg m_A(x)=n \Leftrightarrow W(A)=C(A)$。

这样由命题 3.3 可知问题 2.2 和 2.3 中虽然给定的矩阵相差很小

（$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\3&1&2\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&1&2\end{pmatrix}$），但在交换性的结论是截然不同的。当然可知

问题 2.1 中 2）和 5)、问题 2.2 和问题 2.4 中的$C(A)$都是交换子环，且每个与A可交换的矩阵B都是次数不超过$n-1$次的A的多项式。而问题 2.3 中的$C(A)$不可交换且存在着$B\in C(A)$（即$AB=BA$），但不是A的多项式。

在这里我们并不打算对$C(A)$为交换子环作一般性的讨论，但受问题2.2和2.3的启发，可有

命题3.4 设$A\in P^{n\times n}$，$A_1,A_2,\cdots A_t$为$C(A)$的任一组基，则$C(A)$是$P^{n\times n}$的交换子环$\Leftrightarrow A_iA_j=A_jA_i$，$i,j=1,2,\cdots,t$。

证明：“$\Rightarrow$”是显然得

“$\Leftarrow$”设$B=\sum_{i=1}^{t}x_iA_i,C=\sum_{j=1}^{t}y_jA_j\in C(A)$

从已知得$A_iA_j=A_jA_i$，

$$知BC=(\sum_{i=1}^{t}x_iA_i)(\sum_{j=1}^{t}y_jA_j)=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{t}x_iy_jA_iA_j=\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{t}y_jx_iA_jA_i$$

$$=(\sum_{j=1}^{t}y_jA_j)(\sum_{i=1}^{t}x_iA_i)=CB$$

证毕

由命题 3.1 知，对一般$A \in P^{n\times n}$的$C(A)$维数的计算是比较复杂的，但借助于通常教材上[3, 习题 4.6]（即 $A = diag(a_1E_1, a_2E_2, \cdots, a_sE_s)$，当$i \neq j, a_i \neq a_j$，则$AB = BA \Leftrightarrow B = diag(B_1, B_2, \cdots, B_s)$）的启发，容易得

命题 3.5 设$A \in P^{n\times n}$，且$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1 E_{n_1}, \lambda_2 E_{n_2}, \cdots, \lambda_s E_{n_s}) = \Lambda$，（3.5）

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s \in P$两两互异，

则 $B \in C(A) \Leftrightarrow P^{-1}BP = \mathrm{diag}(B_{11}, B_{22}, \cdots, B_{ss}) \in P^{n\times n}$ （3.6）

且$\dim C(A) = \sum_{i=1}^{s} n_i^2$ （3.7）

命题 3.5 设 $A\in P^{n\times n}$，且 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1E_{n_1},\lambda_2E_{n_2},\cdots,\lambda_sE_{n_s})=\Lambda$， (3.5)

$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s\in P$ 两两互异，

则 $B\in C(A)\Leftrightarrow P^{-1}BP=\mathrm{diag}(B_{11},B_{22},\cdots,B_{ss})\in P^{n\times n}$ (3.6)

且 $\dim C(A)=\sum_{i=1}^{s}n_i^2$ (3.7)

证明：由(3.5)易知， $C(A)\cong C(\Lambda)$ (3.8)

设 $W_i=\{B_i=\mathrm{diag}(0,\cdots,0,B_{ii},0\cdots,0)\mid\forall B_{ii}\in P^{n_i\times n_i}\},i=1,2,\cdots,s$ (3.9)

由(3.8)、(3.9)知 $C(\Lambda)=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_s$，且 $\dim C(\Lambda)=\sum_{i=1}^{s}n_i^2$，这样从(3.8)知(3.7)成立。

命题 3.6 设$A^2 = A \in P^{n\times n}$，且$r = \mathrm{r}(A)$，则$\dim C(A) = r^2 + (n-r)^2$.

证明：由幂等矩阵性质知，有可逆阵$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(E_r, 0)$，相当于（3.5）中 $\lambda_1 = 1$ ， $\lambda_2 = 0$ ， $n_1 = r$ ， $n_2 = n-r$. 进而由（3.7）知 $\dim C(A) = r^2 + (n-r)^2$.

命题 3.7 设 $A \in P^{n \times n}$，且 $A^2 = E$．如果 $r(A-E) = r$ 则 $\dim C(A) = r^2 + (n-r)^2$

证明：因为A可对角化，且特征值仅为 1 或-1，所以特征值 1 的特征子空间V_1的维数等于齐次线性方程组$(A-E)X=0$解空间的维数，因此$\dim V_1 = n - r = n - \mathrm{r}(A-E)$．这说明1为$A$的$n-r$重特征值,进而知-1 为$A$的$r$重特征值。这样当设有可逆阵$P$，使得$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(E_{n-r}, -E_r)$时，相当于（3.5）中$\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = -1$，$n_1 = n - r$，$n_2 = r$．再从（3.7）知$\dim C(A) = r^2 + (n-r)^2$.

命题 3.8 设$A\in P^{n\times n}$，且$A^2=A$或$A^2=E$，则

1）当$n=2$时，则$\dim C(A)=2$或$\dim C(A)=4$；

2）当$n\geq 3$时，则$\dim C(A)>n$，因此$C(A)$不是$P^{n\times n}$的交换子环，存在$B\in C(A)$，且B不能表为A的多项式。

证明：1）$n=2$时，$A=E$或$A=-E$或$A=0$，则$C(A)=P^{2\times 2}$，即$\dim C(A)=4$. 因为A是可对角化的，所以当$A\neq \pm E_2$且$A\neq 0$时，1 必为A的单重特征值，即A必有两个不同特征值. 由(3.5)知$\dim C(A)=2$.

2）分三种情况：

2.1）设$1\leq r(A-E)\leq n-1$

从A可对角化知特征值 1 的特征子空间V_λ的维数$=n-\mathrm{r}(A-E)$.

由已知$1 \le \mathrm{r}(A-E)=r \le n-1$知$A$的特征值 1 为其重特征值，而另一个特征值（0 或-1）是r重特征值. 这样从(3.5)

$$\dim C(A)=r^2+(n-r)^2,\ 1 \le r \le n-1,\ n \ge 3,\ 1 \le \mathrm{r}(A-E)=r \le n-1 \quad (3.10)$$

设$f(r)=r^2+(n-r)^2-n \in C[1,n-r]$（为$[1,n-r]$上的连续函数）

则由$f'(r)$可知$r=\dfrac{n}{2}$为唯一驻点

这样 $f(\dfrac{n}{2})=\dfrac{1}{2}n(n-2)>0$，$f(1)=(n-2)(n-1)>0$，

$f(n-1)=(n-2)(n-1)>0$

这样由（3.10）知 $\dim C(A)=r^2+(n-r)^2>n$

2.2）当$\mathrm{r}(A-E)=0$时有$A=E$，$C(A)=P^{n\times n}$

2.3）当$\mathrm{r}(A-E)=n$时，如果$A^2=A$，从$A(A-E)=0$得$A=0$；如果$A^2=E$，从$(A-E)(A+E)=0$得$A=-E$. 都表明$C(A)=P^{n\times n}$.

总之当$n \geq 3$时，$\dim C(A) > n$．进而由命题 2. 2 和 2. 3 知$C(A)$不是$P^{n\times n}$的交换子环，即存在$B \in C(A)$，且B不能表为A的多项式.

类似可得$A^m = A$，$A^m = E$等矩阵类进行$C(A)$的交换性讨论。

参考文献

[1] 李乔.矩阵论八讲[M],上海,上海科学技术出版社,1988
[2] 杨忠鹏.关于”方阵中心化子的几个性质”的注记[J],衡阳师专学报(自然科学版),12(2)1994:60-64
[3] 北京大学数学系编.高等代数（第三版）[M]，北京，高等教育出版社，2003
[4] 林亚南 高等代数选讲 2003年8月
[5] 李师正主编.高等代数解题方法与技巧[M]，北京，高等教育出版社，2004
[6] 杨子胥.高等代数习题解(修订版)下册[M]，济南,山东科学技术出版社，2001
[7]徐仲等.高等代数(北大．第三版)导教．导学．导考[M]，西安,西北工业大学出版社，2004
[8]林亚南 高等代数选讲(续)2003年8月
[9] 金辉.相似交换矩阵的空间结构探讨[J],工科数学,17(4),2001:93-96
[10] 金辉.与方阵可交换的矩阵空间结构的探讨[J],数学理论与应用,21(3)2000:40-44
[11]程正东,吴波,王圣东.n阶矩阵的可交换空间的维数[J],工科数学,16(4),2000:118-122

谢 谢 ！